

Модель «холодного» разделения ступеней РН

Интегрированные математические пакеты

Кафедра теоретической механики

Юдинцев В. В.

18 мая 2026 г.



САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
SAMARA UNIVERSITY

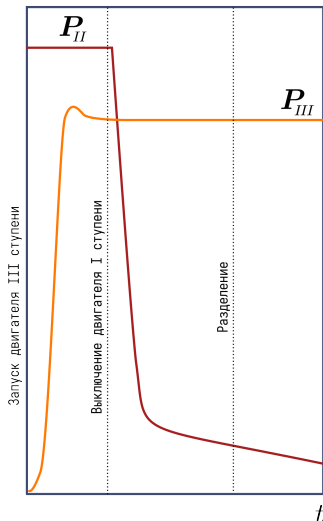
- 1 Разделение ступеней PH
- 2 Модель «холодного» разделения
- 3 Модель в MATLAB
- 4 Модель SimInTech

Разделение ступеней РН

«Горячее» разделение



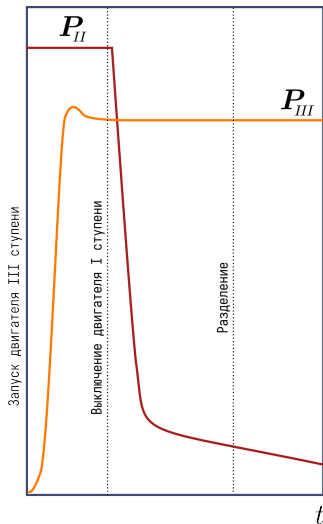
- При «горячем» разделении двигатель III ступени запускается до момента разделения;
- Двигатель II ступени выключается после запуска двигателя III ступени;
- Разделение ступеней производится после выхода тяги III ступени на заданный режим.



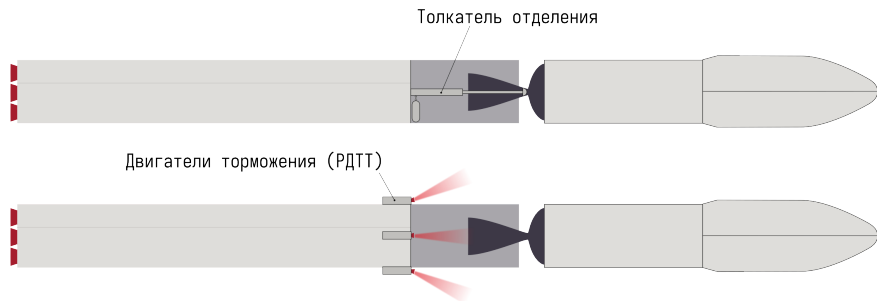
«Горячее» разделение



- При «горячем» разделении двигатель III ступени запускается до момента разделения;
- Двигатель II ступени выключается после запуска двигателя III ступени;
- Разделение ступеней производится после выхода тяги III ступени на заданный режим.



«Холодное» разделение



- При «холодном» разделении двигатель следующей ступени запускается после разделения ступеней
- Для сообщения относительной скорости ступеням используются толкатели, двигатели торможения

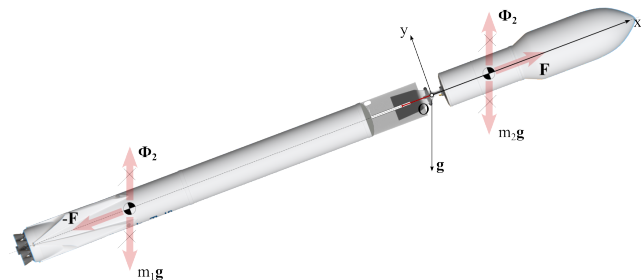
Толкатель отделения РН Falcon 9



Модель «холодного» разделения

Уравнения движения

- Ступени при разделении движутся поступательно вдоль продольной оси
- Движение рассматривается относительно «падающей» системы координат, движущейся с ускорением свободного падения в поле силы тяжести.
- В этой системе координат гравитационные силы ($m_i g$) уравниваются переносными силами инерции Φ_i

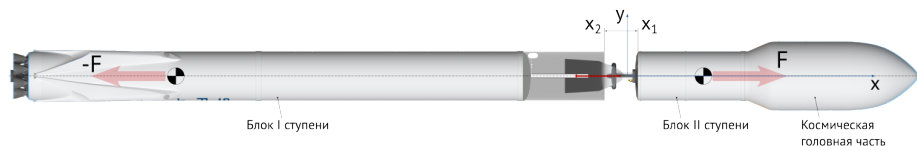


Уравнения движения

Рассматривается поступательное движение разделяемых ступеней вдоль оси x «падающей» системы координат:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = -F; \\ m_2 \ddot{x}_2 = +F. \end{cases}$$

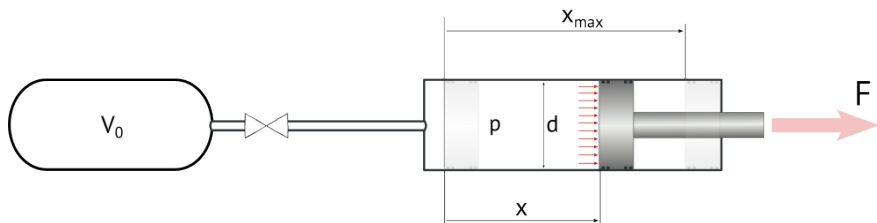
где F – сила, создаваемая пневмотолкателем.



Сила толкателя

Сила, создаваемая пневмотолкателем, определяется давлением в его полости (p) и площадью штока толкателя, на которое действует давление:

$$F = p \cdot \frac{\pi d^2}{4}$$



Давление в полости толкателя

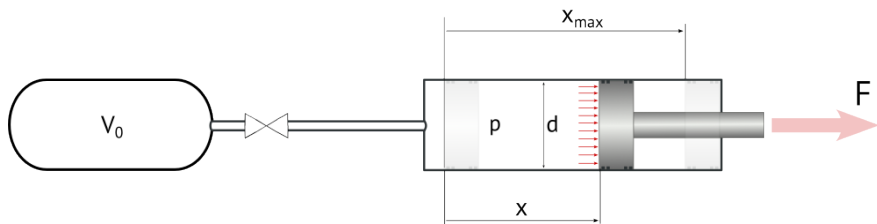
При выдвигании штока толкателя увеличивается объём:

$$V = V_0 + \frac{\pi d^2}{4} \cdot x, \quad x = x_2 - x_1$$

что приводит к уменьшению давления в полости толкателя. Для адиабатного процесса выдвигания штока толкателя:

$$p V^k = \text{const} \Rightarrow p = p_0 \left(\frac{V_0}{V} \right)^k,$$

где k – показатель адиабаты (для воздуха $k \approx 1.4$).



Уравнения движения

Рассматривается поступательное движение разделяемых ступеней вдоль оси x «падающей» системы координат:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = -F; \\ m_2 \ddot{x}_2 = +F. \end{cases} \Rightarrow \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = \ddot{x} = \frac{F}{m_2} + \frac{F}{m_1} = F \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} = \frac{F}{m_*}$$

С учётом выражения для силы пневмотолкателя:

$$m_* \ddot{x} = p_0 \left(\frac{V_0}{V} \right)^k \cdot \frac{\pi d^2}{4}$$

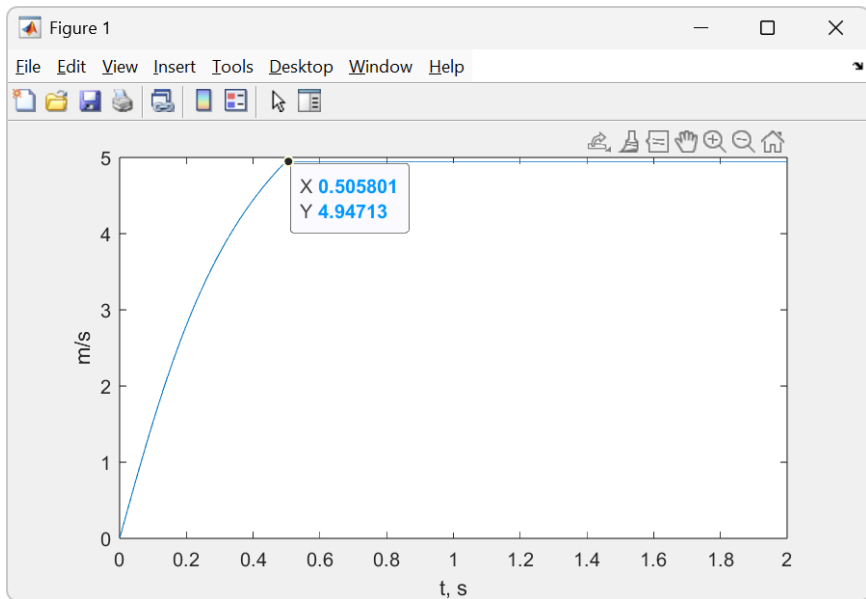
Модель в MATLAB

Уравнения движения и код

$$\begin{cases} \dot{x} = v, \\ \dot{v} = \frac{p_0}{m_*} \left(\frac{V_0}{V}\right)^k \cdot \frac{\pi d^2}{4} \end{cases} \Rightarrow \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \mathbf{f}(t, \mathbf{q}) = \begin{bmatrix} v \\ \frac{p_0}{m_*} \left(\frac{V_0}{V}\right)^k \cdot \frac{\pi d^2}{4} \end{bmatrix}$$

```
1 d = 0.25; A = pi*d^2/4;
2 p0 = 100E5; v0 = 50e-3; k = 1.4;
3 m1 = 45000; m2 = 100000; ma = m1*m2/(m1+m2);
4 dqdt = @(t, q) [q(2); (p0/ma)*(v0/(v0+A*q(1)))^k*A*(q(1) < 1.5)];
5 [t, q] = ode45(dqdt, [0, 2], [0; 0], odeset('RelTol', 1e-6, 'AbsTol', 1e-6));
6 plot(t, q(:, 2));
7 xlabel('t, s'); ylabel('m/s');
```

MATLAB. Результаты



MATLAB. Корректность модели

- Работа газа при адиабатном процессе:

$$A = \frac{p_0 V_0}{k-1} \left[1 - \left(\frac{V_0}{V_e} \right)^{k-1} \right]$$

где V_e – конечный объём (после выдвигания толкателя).

- Теорема об изменении кинетической энергии:

$$T_e - T_0 = \frac{m_* v_e^2}{2} = A$$

- Относительная скорость (скорость приведённой массы):

$$v_e = \sqrt{\frac{2A}{m_*}} = \sqrt{\frac{2}{m_*} \frac{p_0 V_0}{k-1} \left[1 - \left(\frac{V_0}{V_e} \right)^{k-1} \right]}$$

MATLAB. Корректность модели

Для рассматриваемых параметров системы

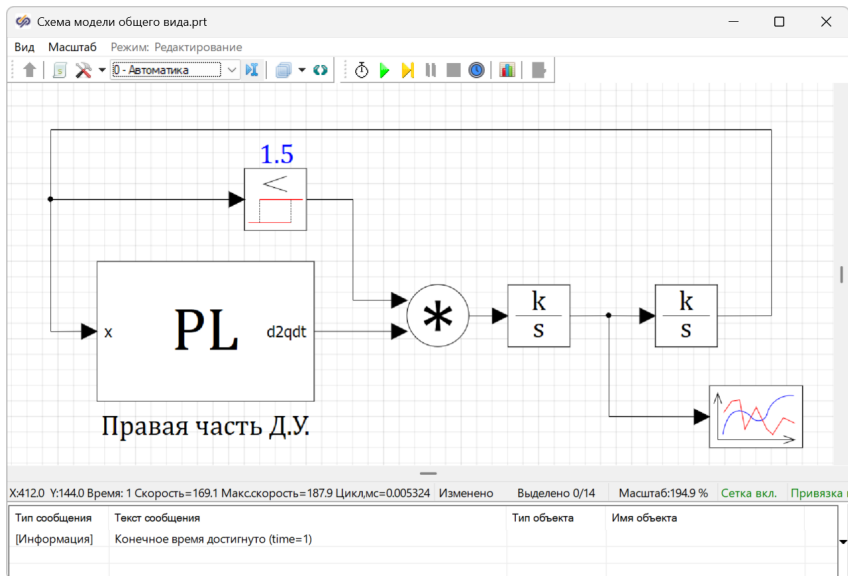
$$\begin{aligned} A &= \frac{p_0 V_0}{k-1} \left[1 - \left(\frac{V_0}{V_e} \right)^{k-1} \right] = \\ &= \frac{10^7 \text{ Па } 50 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3}{1.4 - 1} \left[1 - \left(\frac{50 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3}{50 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 + 1.5 \text{ м} \cdot \pi \cdot 0.25^2 \text{ м}^2 / 4} \right)^{1.4-1} \right] = \\ &= 379.74 \text{ кДж} \end{aligned}$$

Относительная скорость

$$v_e = \sqrt{\frac{2A}{m_*}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 379.74 \text{ кДж} \times (45 \cdot 10^3 \text{ кг} + 100 \cdot 10^3 \text{ кг})}{45 \cdot 10^3 \text{ кг} \times 100 \cdot 10^3 \text{ кг}}} \approx 4.95 \text{ м/с.}$$

Модель SimInTech

Модель 1



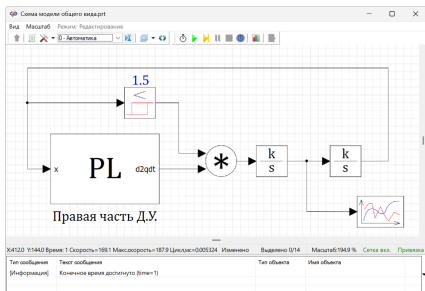
Код блока «Язык программирования»

```
1 input x;  
2 output d2qdt;  
3  
4 d2qdt = (p0/ma) * (v0/(v0+A*x)) ^ k * A;
```

Секция инициализации скрипта проекта

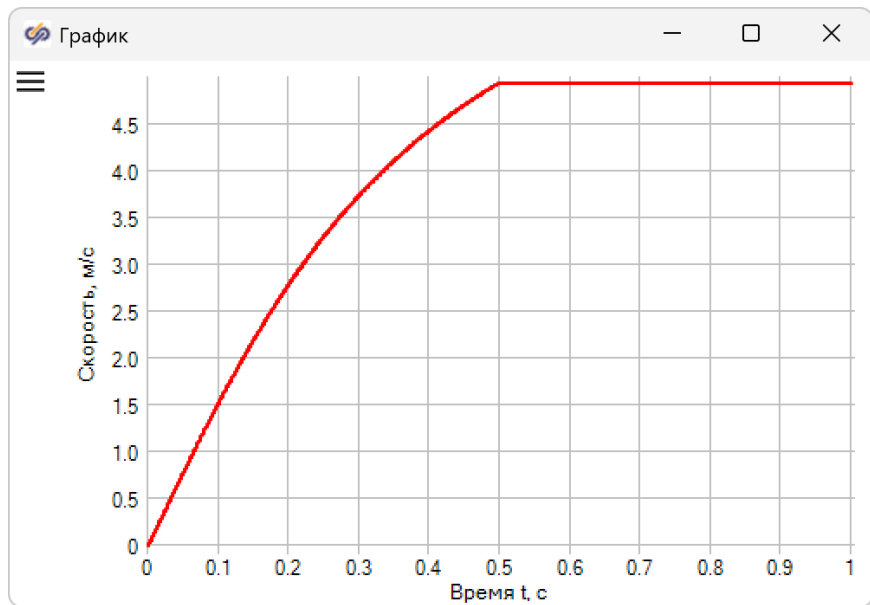
```
1 initialization
2 // Диаметр штока толкателя
3 d = 0.25;
4 // Площадь штока толкателя
5 A = pi*d^2/4;
6 // Начальное давление Па
7 p0 = 100E5;
8 // Начальный объем:
9 // баллон + магистраль + мёртвый объем полости толкателя м3
10 v0 = 50e-3;
11 // Показатель адиабаты
12 k = 1.4;
13 // Масса первой ступени
14 m1 = 45000;
15 // Масса второй ступени
16 m2 = 100000;
17 // Приведенная масса
18 ma = m1*m2/(m1+m2);
19 end;
```

Модель 1

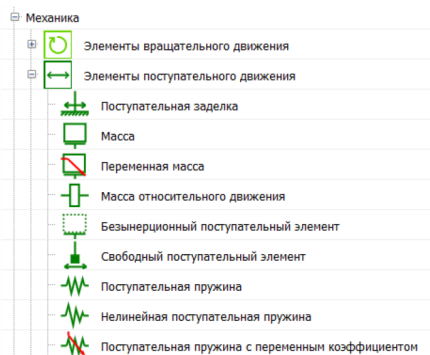


- Правая часть Д.У. записана в блоке «Язык программирования» библиотеки «Динамические».
- Параметры системы заданы в секции инициализации скрипта проекта.
- Окончание работы толкателя (прекращение действия силы на ступени) моделируется при помощи блока «Сигнал меньше уставки» библиотеки «Нелинейные».

Модель 1

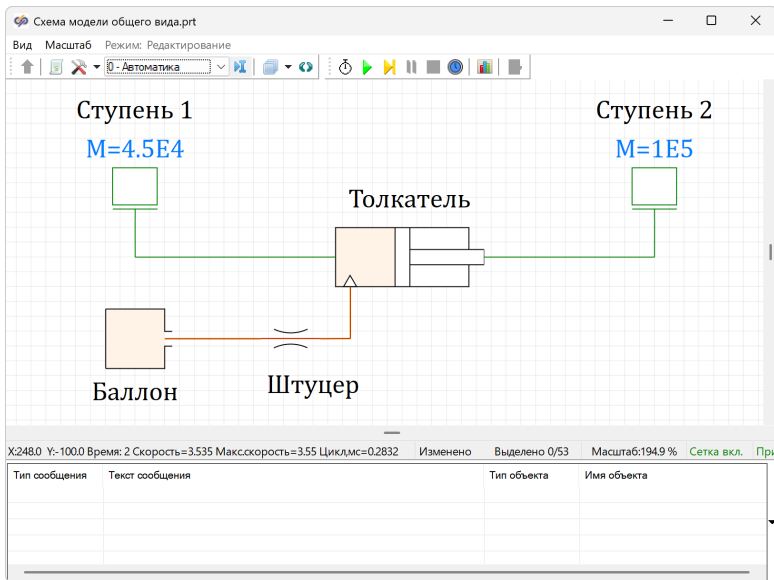


Библиотека "Механика"

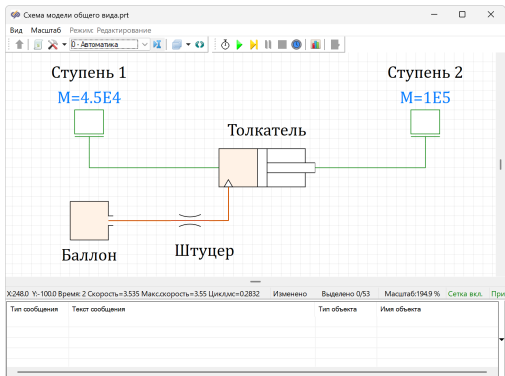


- Блоки библиотеки «Механика» позволяют строить модели систем с одной степенью свободы из готовых «механических» блоков.
- Линии связи между блоками библиотеки «Механика» не совместимы с математическими блоками
- Для связи с «математическими» блоками необходимо использовать блоки преобразователи «датчики», «источники».

Модель 2. Движение двух тел

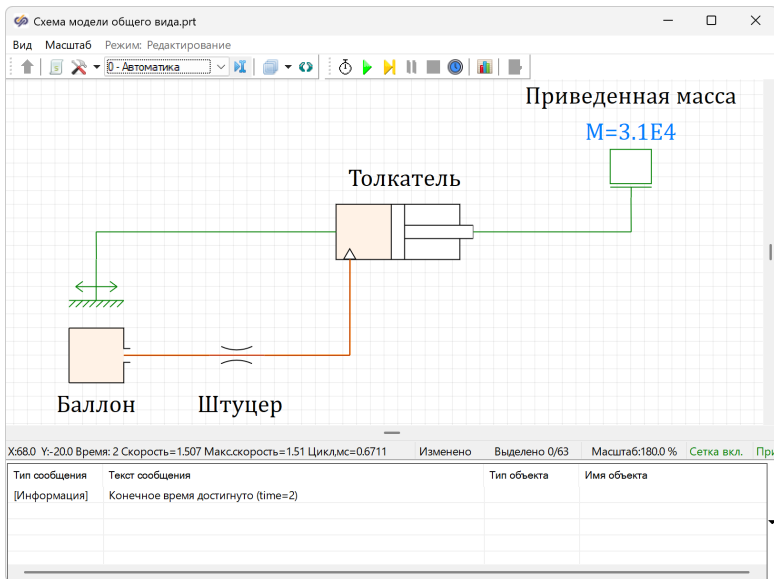


Модель 2. Движение двух тел

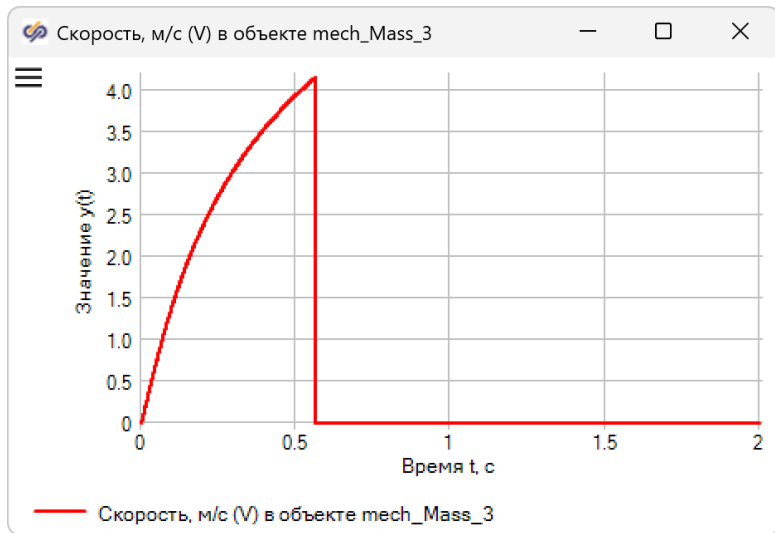


- В модели используются блоки библиотеки «Механика» и «Гидро- и пневмосистемы».
- Модель учитывает динамику течения газа из баллона в полость толкателя при изменении объема полости толкателя (при выдвигении штока).

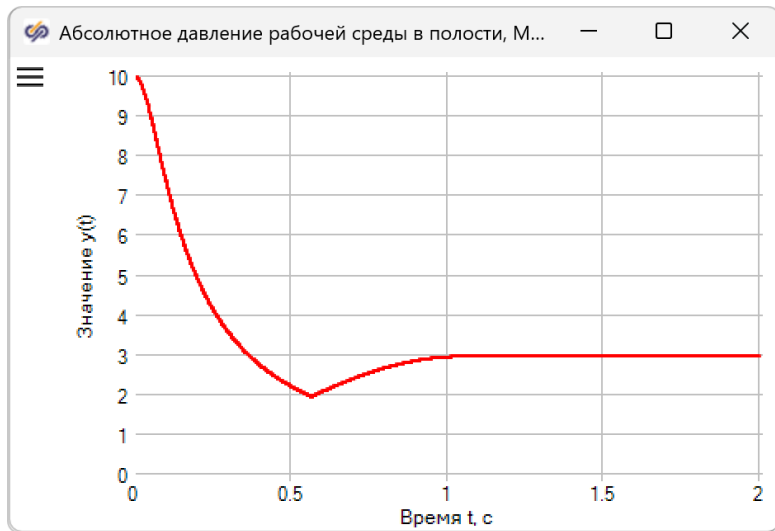
Модель 3. Движение приведённой массы



Модель 3. Относительная скорость



Модель 3. Давление в полости толкателя



Список использованных источников

- [1] Круглов Г. Е. Аналитическое проектирование механических систем. – Самара : Самарский государственный аэрокосмический университет им. акад. С. П. Королева, 2001. – Р. 131.
- [2] Расчет и проектирование систем разделения ступеней ракет / Колесников К. С., Кокушкин В. В., Борзых С. В., and Панкова Н. В. – Москва : Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2006. – Р. 373.
- [3] Кондратьев А. В., Чумак А. А., Стэнилэ К. Д. Сравнение систем крепления и отделения современных композитных головных обтекателей ракет-носителей // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов. – 2012. – no. 4. – Р. 165–177.