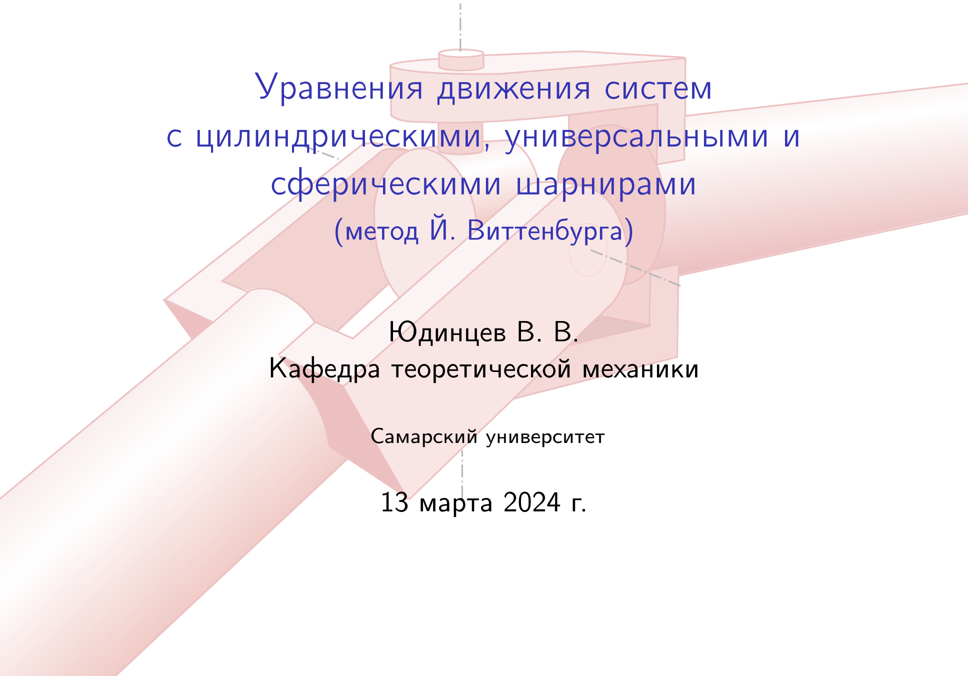


Уравнения движения систем с цилиндрическими, универсальными и сферическими шарнирами

(метод Й. Виттенбурга)

Юдинцев В. В.

Кафедра теоретической механики

Самарский университет

13 марта 2024 г.

Уравнения движения

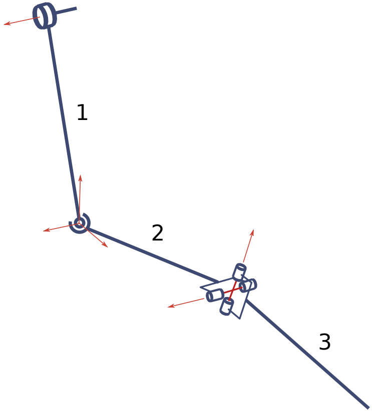
Уравнения движения системы со сферическими шарнирами:

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} \mathbf{K}_{ij}\dot{\boldsymbol{\omega}}_j = \mathbf{M}'_i + \mathbf{M}_i + \sum_{a=1}^{n} S_{ia}\mathbf{Y}_a, \;\; i = 1, \ldots, n} \tag{1}$$

- Для систем со сферическими шарнирами угловые скорости $\boldsymbol{\omega}_j$ независимы, так как сферические шарниры не ограничивают относительную угловую скорость смежных тел.
- Для систем с универсальными и цилиндрическими шарнирами угловые скорости $\boldsymbol{\omega}_j$ не являются независимыми и определяются возможным относительным движением смежных тел.

Кинематика относительного движения

Системы с цилиндрическими и универсальными шарнирами



- Угловые скорости смежных тел зависимы.
- Цилиндрический шарнир: 1 степень свободы.
- Универсальный шарнир: 2 степени свободы.
- Сферический шарнир: 3 степени свободы.

Обобщенные координаты

Угловые скорости выражаются через производные шарнирных координат $\dot{q}_{\alpha i}$. В качестве обобщенных координат используются углы относительного поворота смежных тел (углы Эйлера, Брайнта, ...).

- Для цилиндрического шарнира α необходимо задать один угол:

$$\mathbf{q}_\alpha = [\varphi_{\alpha 1}]^T.$$

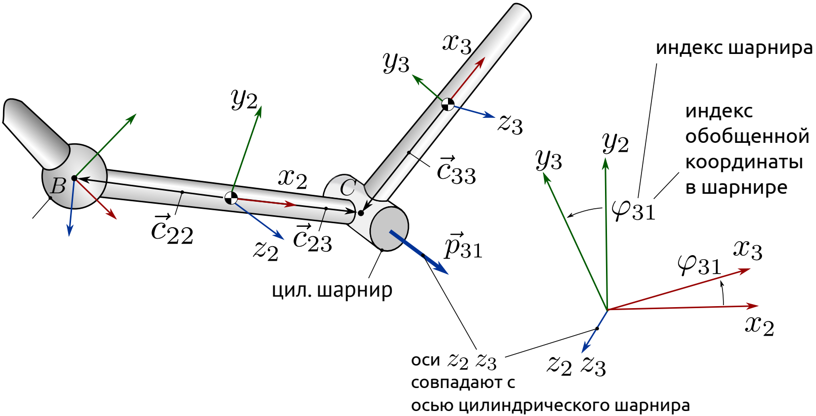
- Для универсального шарнира – два угла:

$$\mathbf{q}_\alpha = [\varphi_{\alpha 1}, \varphi_{\alpha 2}]^T.$$

- Для сферического шарнира – три угла:

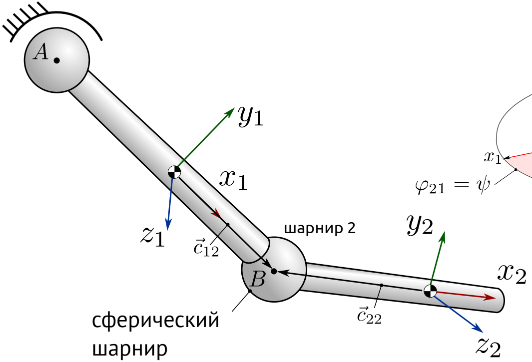
$$\mathbf{q}_\alpha = [\varphi_{\alpha 1}, \varphi_{\alpha 2}, \varphi_{\alpha 3}]^T.$$

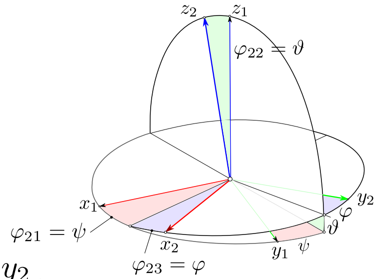
Шарнирные координаты цилиндрического шарнира



Шарнирные координаты сферического шарнира

Углы Эйлера



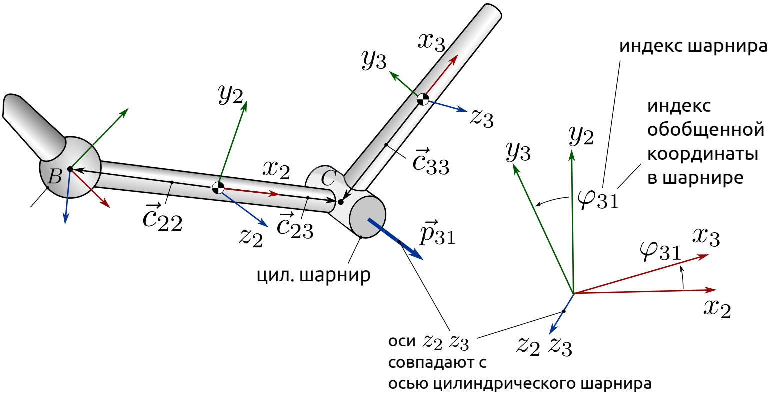


Матрицы поворота

Матрицы ортогонального преобразования (матрицы поворота) для преобразования координат из базиса одного тела в базис другого (смежного) выражаются через обобщенные координаты.

- $\mathbf{A}^{01}$ – матрица преобразования координат из базиса тела 1 в базис тела 0: $\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{A}^{01}\mathbf{r}^{(1)}$.
- $\mathbf{A}^{12}$ – матрица преобразования координат из базиса 2 в базис 1.

Матрица поворота для цилиндрического шарнира



$$\mathbf{A}^{23} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_{31} & -\sin\varphi_{31} & 0 \\ \sin\varphi_{31} & \cos\varphi_{31} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Относительная угловая скорость $\mathbf{\Omega}_\alpha$

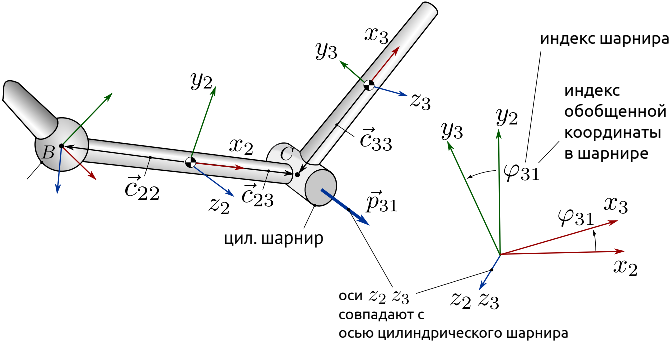
$\mathbf{\Omega}_\alpha$ – угловая скорость тела $i^-(\alpha)$ относительно $i^+(\alpha)$. Выражение угловой скорости через обобщенные скорости (кинематические уравнения):

$$\mathbf{\Omega}_\alpha = \sum_{i=1}^{n_\alpha} \mathbf{p}_{\alpha i}\dot{\varphi}_{\alpha i}, \alpha = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

- n_α - число степеней свободы в шарнире;
- $\mathbf{p}_{\alpha i}$ - единичные векторы, направленные вдоль осей вращения; для цилиндрического шарнира $n_\alpha = 1$ и существует один вектор $\mathbf{p}_{\alpha i}$ вокруг которого происходит вращение смежных тел $i^+(\alpha)$ и $i^-(\alpha)$.
- В общем случае координаты векторов $\mathbf{p}_{\alpha i}^{(i^-(\alpha))}$ являются функциями обобщенных координат $\varphi_{\alpha i}$.

Единичные векторы $\mathbf{p}_{\alpha i}$ для цилиндрического шарнира

- Для цилиндрического шарнира вектор $\mathbf{p}_{\alpha i}^{(i^-(\alpha))} = const$.

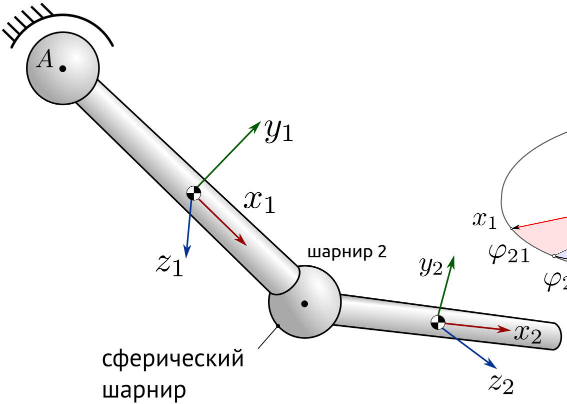


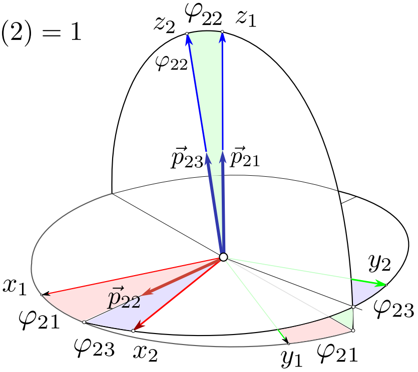
Для шарнира 3: $\mathbf{p}_{31}^{(3)} = (0, 0, 1)^T$

Единичные векторы $\mathbf{p}_{\alpha i}$ для сферического шарнира

$\mathbf{p}_{23}^{(2)} = (0,0,1)^T = const.$

$i^-(2) = 2,\ i^+(2) = 1$

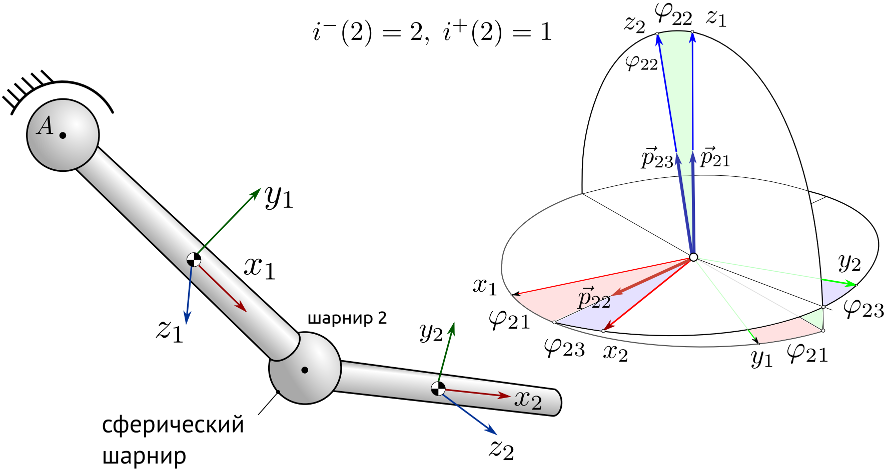




Единичные векторы $\mathbf{p}_{\alpha i}$ для сферического шарнира

$$\mathbf{p}_{22}^{(2)} = (\cos\varphi_{23}(t), -\sin\varphi_{23}(t), 0)^T.$$

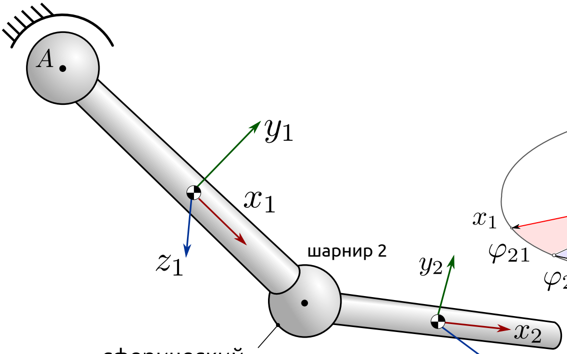
$$i^-(2) = 2,\ i^+(2) = 1$$

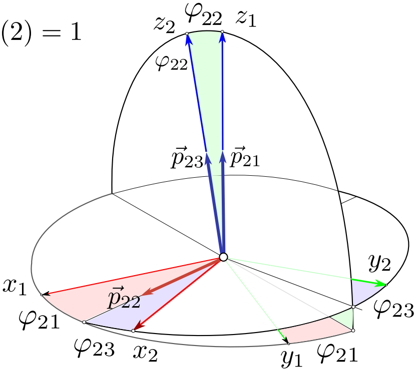


Единичные векторы $\mathbf{p}_{\alpha i}$ для сферического шарнира

$$\mathbf{p}_{21}^{(2)} = (\sin\varphi_{22}\sin\varphi_{23},\ \sin\varphi_{22}\cos\varphi_{23},\ \cos\varphi_{22})^T.$$

$$i^-(2) = 2,\ i^+(2) = 1$$





Относительное угловое ускорение

Угловое ускорение тела $i^{-}(\alpha)$ относительно $i^{+}(\alpha)$:

$$\mathring{\mathbf{\Omega}}_\alpha = \sum_{i=1}^{n_\alpha} \left(\mathbf{p}_{\alpha i} \ddot{\varphi}_{\alpha i} + \sum_{j=1}^{n_\alpha} \frac{\partial \mathbf{p}_{\alpha i}}{\partial \varphi_{\alpha j}} \dot{\varphi}_{\alpha i} \dot{\varphi}_{\alpha j} \right), \alpha = 1, \ldots, n. \tag{3}$$

Выделив члены со старшими производными, получим

$$\mathring{\mathbf{\Omega}}_\alpha = \sum_{i=1}^{n_\alpha} \mathbf{p}_{\alpha i} \ddot{\varphi}_{\alpha i} + \boldsymbol{\phi}_\alpha, \ \alpha = 1, \ldots, n, \tag{4}$$

где

$$\boldsymbol{\phi}_\alpha = \sum_{i=1}^{n_\alpha} \sum_{j=1}^{n_\alpha} \frac{\partial \mathbf{p}_{\alpha i}}{\partial \varphi_{\alpha j}} \dot{\varphi}_{\alpha i} \dot{\varphi}_{\alpha j}, \ \alpha = 1, \ldots, n. \tag{5}$$

Сферический шарнир

Угловая скорость тела 2 относительно тела 1 в базисе тела 2:

$$\boldsymbol{\Omega}_2^{(2)} = \mathbf{p}_{21}^{(2)}\dot{\varphi}_{21} + \mathbf{p}_{22}^{(2)}\dot{\varphi}_{22} + \mathbf{p}_{23}^{(2)}\dot{\varphi}_{23} = \begin{bmatrix} \sin\varphi_{22}\sin\varphi_{23} \\ \sin\varphi_{22}\cos\varphi_{23} \\ \cos\varphi_{22} \end{bmatrix}\dot{\varphi}_{21} + \begin{bmatrix} \cos\varphi_{23} \\ -\sin\varphi_{23} \\ 0 \end{bmatrix}\dot{\varphi}_{22} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\dot{\varphi}_{23} \quad (6)$$

Угловое ускорение тела 2 относительно тела 1 в базисе тела 2:

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\Omega}}{}_2^{(2)} = \mathbf{p}_{21}^{(2)}\ddot{\varphi}_{21} + \mathbf{p}_{22}^{(2)}\ddot{\varphi}_{22} + \mathbf{p}_{23}^{(2)}\ddot{\varphi}_{23} + \begin{bmatrix} \cos\varphi_{22}\sin\varphi_{23} \\ \cos\varphi_{22}\cos\varphi_{23} \\ -\sin\varphi_{22} \end{bmatrix}\dot{\varphi}_{21}\dot{\varphi}_{22} + $$

$$+ \begin{bmatrix} \sin\varphi_{22}\cos\varphi_{23} \\ -\sin\varphi_{22}\sin\varphi_{23} \\ 0 \end{bmatrix}\dot{\varphi}_{21}\dot{\varphi}_{23} + \begin{bmatrix} -\sin\varphi_{23} \\ -\cos\varphi_{23} \\ 0 \end{bmatrix}\dot{\varphi}_{22}\dot{\varphi}_{23} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\dot{\varphi}_{23} \quad (7)$$

Абсолютное движение

Абсолютная угловая скорость

Относительная и абсолютная скорости связаны следующим отношением:

$$\boldsymbol{\Omega}_\alpha = \boldsymbol{\omega}_{i^-(\alpha)} - \boldsymbol{\omega}_{i^+(\alpha)}, \ \alpha = 1, \dots, n. \tag{8}$$

или:

$$\boldsymbol{\Omega}_\alpha = -\sum_{i=0}^{n} S_{i\alpha} \boldsymbol{\omega}_i = -S_{0\alpha} \boldsymbol{\omega}_0 - \sum_{i=1}^{n} S_{i\alpha} \boldsymbol{\omega}_i \ \alpha = 1, \dots, n. \tag{9}$$

В матричной форме:

$$\boldsymbol{\Omega} = -\boldsymbol{\omega}_0 \mathbf{S}_0^T - \mathbf{S}^T \boldsymbol{\omega}, \tag{10}$$

где $\boldsymbol{\Omega} = [\boldsymbol{\Omega}_1 \dots \boldsymbol{\Omega}_n]^T$ и $\omega = [\omega_1 \dots \omega_n]^T$ - матрицы-столбцы относительных и абсолютных скоростей.

Абсолютная угловая скорость

Учитывая тождество

$$\mathbf{T}^T\mathbf{S}^T = \mathbf{E}$$

умножим последнее выражение слева на $\mathbf{T}^T$, что позволит выразить матрицу абсолютных угловых скоростей:

$$\boldsymbol{\omega} = -\mathbf{T}^T\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\omega}_0\mathbf{1}_n \tag{11}$$

и угловую скорость каждого тела:

$$\boldsymbol{\omega}_i = -\sum_{a=1}^{n} T_{ai}\boldsymbol{\Omega}_a + \boldsymbol{\omega}_0,\ a = 1, \ldots n. \tag{12}$$

Абсолютное угловое ускорение

Продифференцировав (12), получим абсолютное угловое ускорение:

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_i = -\sum_{a=1}^{n} T_{ai}(\overset{\circ}{\boldsymbol{\Omega}}_a + \omega_a^*) + \omega_0, \;\; a = 1, \ldots, n, \tag{13}$$

где

$$\boldsymbol{\omega}_a^* = \boldsymbol{\omega}_{i^-(a)} \times \boldsymbol{\Omega}_a \;\; a = 1, \ldots, n. \tag{14}$$

Уравнение можно переписать в матричной форме:

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = -\mathbf{T}^T(\overset{\circ}{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\omega}^*) + \dot{\omega}_0 \mathbf{1}_n. \tag{15}$$

Абсолютное угловое ускорение

Матрица-столбец относительных угловых ускорений определяется следующим образом:

$$\overset{\circ}{\mathbf{\Omega}} = \mathbf{p}^T \ddot{\boldsymbol{\varphi}} + \boldsymbol{\phi}, \tag{16}$$

где $\ddot{\boldsymbol{\varphi}} = [\ddot{\varphi}_{11}, \ldots, \ddot{\varphi}_{1n_1}, \ldots, \ddot{\varphi}_{n1}, \ldots, \ddot{\varphi}_{nn_n}]^T$; $\mathbf{p}$ - блочно-диагональная матрица:

$$\mathbf{p}^T = \begin{bmatrix} \boxed{\mathbf{p}_{11} \cdots \mathbf{p}_{1n_1}} & \cdots & \cdots & \mathbf{0} \\ \cdots & \boxed{\mathbf{p}_{21} \cdots \mathbf{p}_{2n_2}} & \cdots & \cdots \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ \mathbf{0} & \cdots\cdots\cdots & & \boxed{\mathbf{p}_{n1} \cdots \mathbf{p}_{nn_n}} \end{bmatrix} \tag{17}$$

Каждый столбец блочной матрицы $\mathbf{p}$ соответствует одному шарниру, а количество строк равно суммарному числу степеней свободы во всех шарнирах.

Абсолютное угловое ускорение

Подставив относительное угловое ускорение

$$\mathring{\boldsymbol{\Omega}} = \mathbf{p}^T \ddot{\boldsymbol{\varphi}} + \boldsymbol{\phi} \tag{18}$$

в выражение для абсолютного ускорения

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = -\mathbf{T}^T (\mathring{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\omega}^*) + \dot{\omega}_0 \mathbf{1}_n, \tag{19}$$

получим

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = -\mathbf{T}^T (\mathbf{p}^T \ddot{\boldsymbol{\varphi}} + \boldsymbol{f}) + \dot{\boldsymbol{\omega}}_0 \mathbf{1}_n, \tag{20}$$

где

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\omega}^*.$$

Уравнения движения системы

Уравнения движения для систем со сферическими шарнирами дополняются моментами реакций:

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{K}_{ij}\dot{\boldsymbol{\omega}}_j = \mathbf{M}'_i + \mathbf{M}_i + \sum_{a=1}^{n} \mathbf{S}_{ia}(\mathbf{Y}_a + \mathbf{Y}^c_a), \ i = 1, \dots, n, \tag{21}$$

$\mathbf{Y}^c_a$ - дополнительные моменты реакций в цилиндрических и универсальных шарнирах.
Матричная форма уравнения (21):

$$\mathbf{K}\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{M}' + \mathbf{M} + \mathbf{S}(\mathbf{Y} + \mathbf{Y}^c). \tag{22}$$

Момент реакции

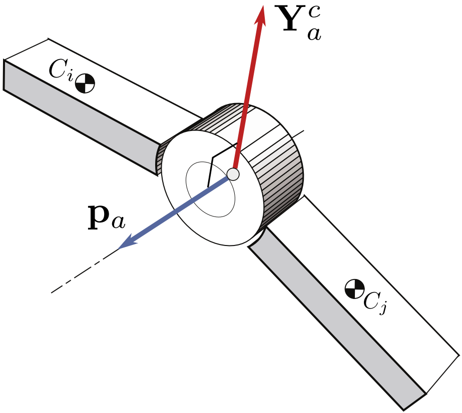
Подставим полученные матрицы угловых ускорений и скоростей в (22):

$$\mathbf{K}\left(-\mathbf{T}^T(\mathbf{p}^T\ddot{\boldsymbol{\varphi}}+\mathbf{f})+\dot{\omega}_0\mathbf{1}_n\right)=\mathbf{M}'+\mathbf{M}+\mathbf{S}(\mathbf{Y}+\mathbf{Y}^c). \tag{23}$$

Для исключения из (23) моментов реакции $\mathbf{Y}^c$, умножим уравнение (23) слева на $\mathbf{T}$:

$$\mathbf{Y}_c=\mathbf{T}\left(\mathbf{K}\left(-\mathbf{T}^T(\mathbf{p}^T\ddot{\boldsymbol{\varphi}}+\mathbf{f})+\dot{\boldsymbol{\omega}}_0\mathbf{1}_n\right)-\mathbf{M}'-\mathbf{M}\right)-\mathbf{Y}. \tag{24}$$

Уравнения движения



Моменты реакции $\mathbf{Y}_a^c$, составляющие матрицу $\mathbf{Y}_c$, ортогональны соответствующим осям вращения, которые образуют цилиндрический или универсальный шарниры:

$$\mathbf{Y}_\alpha^c \cdot \mathbf{p}_\alpha = 0$$

Уравнения движения

Умножив выражение

$$\mathbf{Y}_c = \mathbf{T}\left(\mathbf{K}\left(-\mathbf{T}^T(\mathbf{p}^T\ddot{\boldsymbol{\varphi}} + \mathbf{f}) + \dot{\boldsymbol{\omega}}_0\mathbf{1}_n\right) - \mathbf{M}' - \mathbf{M}\right) - \mathbf{Y}. \tag{25}$$

на матрицу $\mathbf{p}$, получим уравнения движения механических систем с цилиндрическими, универсальными и сферическими шарнирами:

$$\mathbf{A}\ddot{\boldsymbol{\varphi}} = \mathbf{B}, \tag{26}$$

где

$$\mathbf{A} = (\mathbf{pT}) \cdot \mathbf{K} \cdot (\mathbf{pT})^T, \tag{27}$$

$$\mathbf{B} = -(\mathbf{pT})\left(\mathbf{K}(\mathbf{T}^T\mathbf{f} - \dot{\boldsymbol{\omega}}_0\mathbf{1}_n) + \mathbf{M}' + \mathbf{M}\right) - \mathbf{pY}. \tag{28}$$

$$\mathbf{K}_{ij} = \begin{cases} \mathbf{K}_i, & i = j, \\ M(\mathbf{b}_{j0} \cdot \mathbf{d}_{ij}\mathbf{E} - \mathbf{b}_{j0}\mathbf{d}_{ij}), & s_i < s_j, \\ M(\mathbf{d}_{ji} \cdot \mathbf{b}_{i0}\mathbf{E} - \mathbf{d}_{ji}\mathbf{b}_{i0}), & s_j < s_i, \\ 0, & \text{в других случаях.} \end{cases} \tag{29}$$

$$\mathbf{K}_i = \mathbf{J}_i + \sum_{k=1}^{n} m_k(\mathbf{d}_{ik}^2\mathbf{E} - \mathbf{d}_{ik}\mathbf{d}_{ik}),\ i = 1, \ldots, n. \tag{30}$$

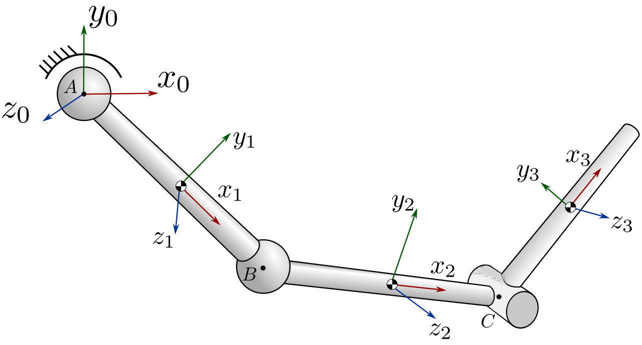
$$\mathbf{M}_i' = -\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{K}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i - M\left[\sum_{j:s_i<s_j} \mathbf{d}_{ij} \times (\boldsymbol{\omega}_j \times (\boldsymbol{\omega}_j \times \mathbf{b}_{j0}))+\right.$$

$$\left.+\mathbf{b}_{i0} \times \left(\sum_{j:s_j<s_i} \boldsymbol{\omega}_j \times (\boldsymbol{\omega}_j \times \mathbf{d}_{ji}) - \ddot{\mathbf{r}}_0\right)\right] - \sum_{j:s_i\le s_j} \mathbf{d}_{ij} \times \mathbf{F}_j,\ i = 1, \ldots n.$$

Построение уравнений

Геометрические параметры

- Длины звеньев l_1, l_2, l_3.
- Расположение шарниров.

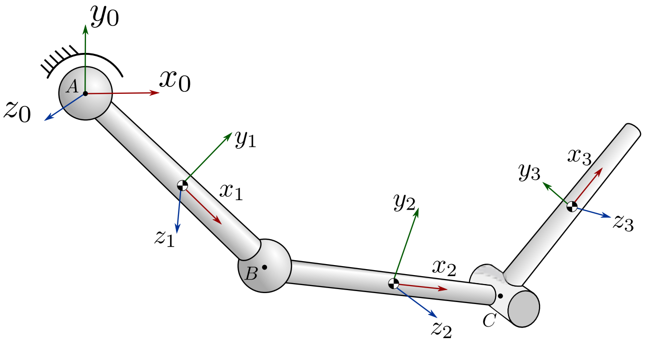


Структура системы

- Построение ориентированного правильно пронумерованный граф, описывающий структуру системы.
- Построение матрицы инцидентности $\mathbf{S}_0$, $\mathbf{S}$.
- Построение матрицы $\mathbf{T}$.
- Таблица функций $i^+(\alpha)$, $i^-(\alpha)$.

Системы координат

- Выбор расположения осей центральной системы координат для каждого тела.



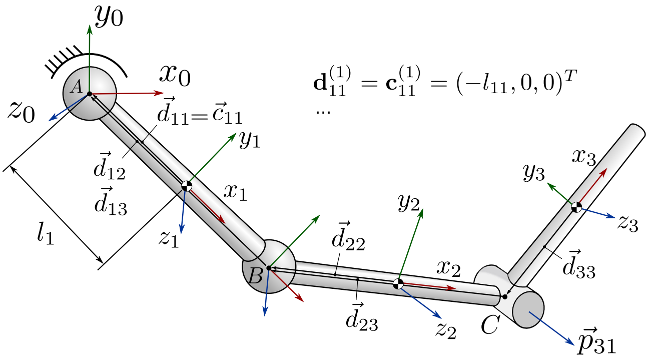
Шарнирные векторы

- Определение координат шарнирных векторов $\mathbf{c}_{i\alpha}^{(i)}$ для каждого тела.
- Вектор $\mathbf{c}_{i\alpha}^{(i)}$ направлен из центра масс тела i к шарнирной точке α, если шарнирная точка α принадлежит телу i. В противном случае вектор $\mathbf{c}_{i\alpha}^{(i)} = \mathbf{0}$

Векторы $\mathbf{d}_{ij}$

- Вычислить координаты векторов $\mathbf{d}_{ij}$ в базисе тела i

$$\mathbf{d}_{ij} = \sum_{a=1}^{n} T_{ai} S_{ja} \mathbf{c}_{ja},\ i, j = 1, \dots n$$



$$\mathbf{d}_{11}^{(1)} = \mathbf{c}_{11}^{(1)} = (-l_{11}, 0, 0)^T$$

...

Инерционно-массовые параметры

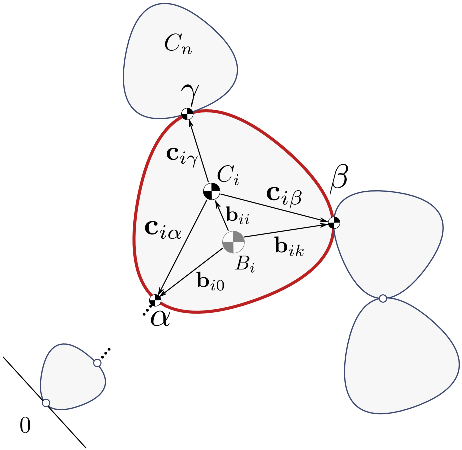
- Задать массы тел

$$m_1 = \ldots,\ m_2 = \ldots,\ m_3 = \ldots$$

- Задать тензоры инерции каждого тела относительно центральных осей

$$\mathbf{J}_1^{(1)} = \begin{bmatrix} J_{1xx}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & J_{1yy}^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & J_{1zz}^{(1)} \end{bmatrix},\ \mathbf{J}_2^{(2)} = \ldots,\ \mathbf{J}_3^{(3)} = \ldots$$

Определение положение барицентра

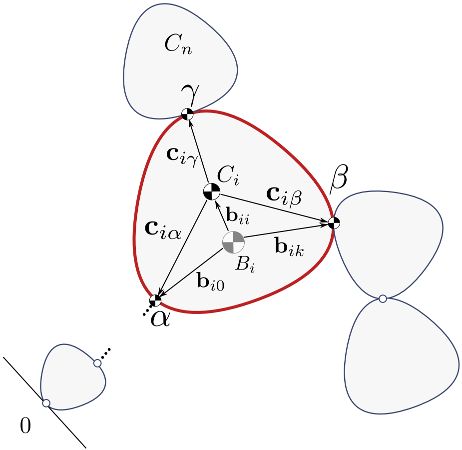


- Для определения векторов $\mathbf{b}_{i0}$ необходимо найти положение барицентров тел (точки B_i)
- Векторы $\mathbf{b}_{i0}$ определяются следующим образом:

$$\mathbf{b}_{i0} = \frac{\sum_{j=1}^{n} \mathbf{d}_{ij} m_j}{M}$$

где M – масса всей системы.

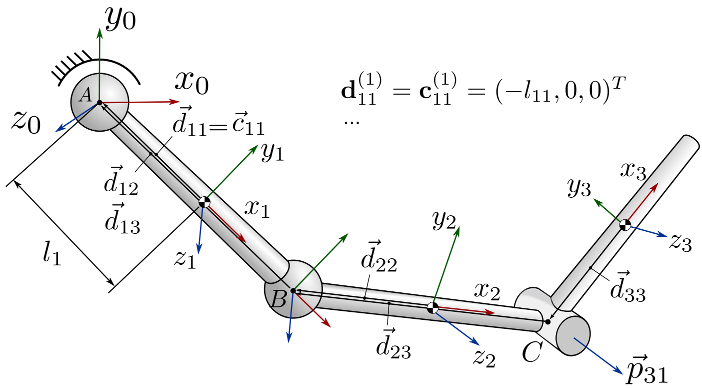
Тензоры инерции дополненных тел



- Вычислить тензоры инерции дополненных тел относительно предшествующей шарнирной точки

$$\mathbf{K}_i = \mathbf{J}_i + \sum_{k=1}^{n} m_k (\mathbf{d}_{ik}^2 \mathbf{E} - \mathbf{d}_{ik}\mathbf{d}_{ik}),$$

Обобщенные координаты



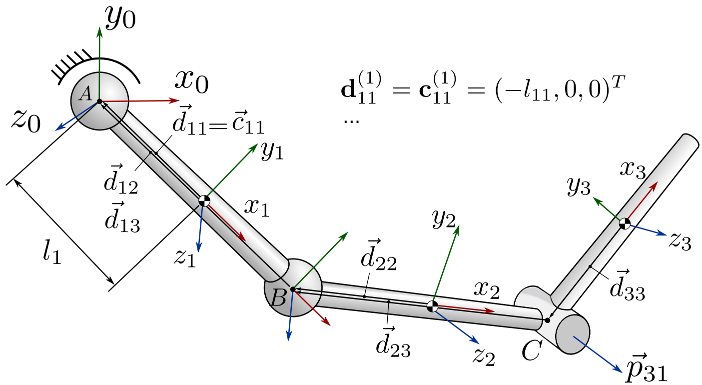
$$\mathbf{d}_{11}^{(1)} = \mathbf{c}_{11}^{(1)} = (-l_{11}, 0, 0)^T$$

...

Выбор обобщенных координат для каждого шарнира:

$$q_{11}, q_{12}, q_{13}, \quad q_{21}, q_{22}, q_{23}, \quad q_{31}.$$

Матрицы преобразования координат

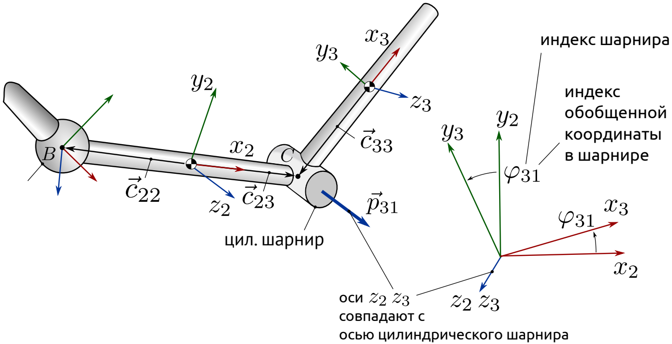


$$\mathbf{d}_{11}^{(1)} = \mathbf{c}_{11}^{(1)} = (-l_{11}, 0, 0)^T$$

...

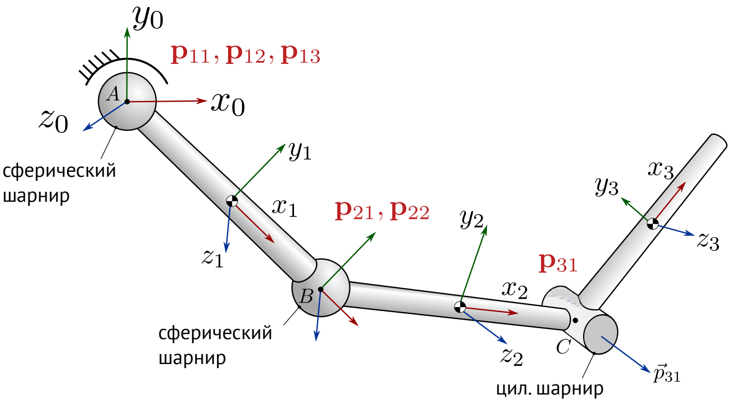
$$\mathbf{A}^{01}(q_{11}, q_{12}, q_{13}), \quad \mathbf{A}^{12}(q_{21}, q_{22}, q_{23}), \quad \mathbf{A}^{23}(q_{31}).$$

Векторы $\mathbf{p}_{\alpha i}$



Для каждого шарнира определяется набор векторов $\mathbf{p}_{\alpha j}^{(i^-(\alpha))}$, $j = 1, \dots, n_\alpha$

Формирование матрицы $\mathbf{p}$



$$\mathbf{p}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{11} & \mathbf{p}_{12} & \mathbf{p}_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{p}_{21} & \mathbf{p}_{22} & \mathbf{p}_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{p}_{31} \end{bmatrix}$$

Построение тензоров $\mathbf{K}_{ij}$

$$\mathbf{K}_{ij} = \begin{cases} \mathbf{K}_i, & i = j, \\ M(\mathbf{b}_{j0} \cdot \mathbf{d}_{ij}\mathbf{E} - \mathbf{b}_{j0}\mathbf{d}_{ij}), & s_i < s_j, \\ M(\mathbf{d}_{ji} \cdot \mathbf{b}_{i0}\mathbf{E} - \mathbf{d}_{ji}\mathbf{b}_{i0}), & s_j < s_i, \\ 0, & \text{в других случаях.} \end{cases} \tag{31}$$

$$\mathbf{K}_i = \mathbf{J}_i + \sum_{k=1}^{n} m_k(\mathbf{d}_{ik}^2\mathbf{E} - \mathbf{d}_{ik}\mathbf{d}_{ik}),\ i = 1, \dots, n. \tag{32}$$

Построение векторов $\mathbf{M}'_i$

$$\mathbf{M}'_i = -\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{K}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i - M\left[\sum_{j:s_i<s_j} \mathbf{d}_{ij} \times (\boldsymbol{\omega}_j \times (\boldsymbol{\omega}_j \times \mathbf{b}_{j0}))+\right.$$

$$\left.+\mathbf{b}_{i0} \times \left(\sum_{j:s_j<s_i} \boldsymbol{\omega}_j \times (\boldsymbol{\omega}_j \times \mathbf{d}_{ji}) - \ddot{\mathbf{r}}_0\right)\right] - \sum_{j:s_i\leq s_j} \mathbf{d}_{ij} \times \mathbf{F}_j,\ i = 1, \ldots n.$$

Построение матрицы $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = (\mathbf{pT}) \cdot \mathbf{K} \cdot (\mathbf{pT})^T$$

Все координатные столбцы $\mathbf{p}_{\alpha i}$ и тензоры $\mathbf{K}_{ij}$ должны быть записаны в одной системе коодинат.

$$\mathbf{pT} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{11} & 0 & 0 \\ \mathbf{p}_{12} & 0 & 0 \\ \mathbf{p}_{13} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{p}_{21} & 0 \\ 0 & \mathbf{p}_{22} & 0 \\ 0 & \mathbf{p}_{23} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{p}_{31} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{p}_{11} & -\mathbf{p}_{11} & -\mathbf{p}_{11} \\ -\mathbf{p}_{12} & -\mathbf{p}_{12} & -\mathbf{p}_{12} \\ -\mathbf{p}_{13} & -\mathbf{p}_{13} & -\mathbf{p}_{13} \\ 0 & -\mathbf{p}_{21} & -\mathbf{p}_{21} \\ 0 & -\mathbf{p}_{22} & -\mathbf{p}_{22} \\ 0 & -\mathbf{p}_{23} & -\mathbf{p}_{23} \\ 0 & 0 & -\mathbf{p}_{31} \end{bmatrix}$$

Произведение $(\mathbf{pT}) \cdot \mathbf{K}$

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{p}_{11} & -\mathbf{p}_{11} & -\mathbf{p}_{11} \\ -\mathbf{p}_{12} & -\mathbf{p}_{12} & -\mathbf{p}_{12} \\ -\mathbf{p}_{13} & -\mathbf{p}_{13} & -\mathbf{p}_{13} \\ 0 & -\mathbf{p}_{21} & -\mathbf{p}_{21} \\ 0 & -\mathbf{p}_{22} & -\mathbf{p}_{22} \\ 0 & -\mathbf{p}_{23} & -\mathbf{p}_{23} \\ 0 & 0 & -\mathbf{p}_{31} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} & \mathbf{K}_{13} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} & \mathbf{K}_{23} \\ \mathbf{K}_{31} & \mathbf{K}_{32} & \mathbf{K}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{11} & \mathbf{k}_{12} & \mathbf{k}_{13} \\ \mathbf{k}_{21} & \mathbf{k}_{22} & \mathbf{k}_{23} \\ \mathbf{k}_{31} & \mathbf{k}_{32} & \mathbf{k}_{33} \\ \mathbf{k}_{41} & \mathbf{k}_{42} & \mathbf{k}_{43} \\ \mathbf{k}_{51} & \mathbf{k}_{52} & \mathbf{k}_{53} \\ \mathbf{k}_{61} & \mathbf{k}_{62} & \mathbf{k}_{63} \\ \mathbf{k}_{71} & \mathbf{k}_{72} & \mathbf{k}_{73} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_{11} = -\mathbf{p}_{11} \cdot (\mathbf{K}_{11} + \mathbf{K}_{21} + \mathbf{K}_{31})$$

Координатная форма в базисе 0

$$\mathbf{k}_{11}^{(0)} = -\mathbf{p}_{11}^{(0)T}(\mathbf{K}_{11}^{(0)} + \mathbf{K}_{21}^{(0)} + \mathbf{K}_{31}^{(0)})$$

Размерность матрицы $\mathbf{k}_{11}$ – 1x3

Формирование матрицы $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{11} & \mathbf{k}_{12} & \mathbf{k}_{13} \\ \mathbf{k}_{21} & \mathbf{k}_{22} & \mathbf{k}_{23} \\ \mathbf{k}_{31} & \mathbf{k}_{32} & \mathbf{k}_{33} \\ \mathbf{k}_{41} & \mathbf{k}_{42} & \mathbf{k}_{43} \\ \mathbf{k}_{51} & \mathbf{k}_{52} & \mathbf{k}_{53} \\ \mathbf{k}_{61} & \mathbf{k}_{62} & \mathbf{k}_{63} \\ \mathbf{k}_{71} & \mathbf{k}_{72} & \mathbf{k}_{73} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathbf{p}_{11} & -\mathbf{p}_{12} & -\mathbf{p}_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mathbf{p}_{11} & -\mathbf{p}_{12} & -\mathbf{p}_{13} & -\mathbf{p}_{21} & -\mathbf{p}_{22} & -\mathbf{p}_{23} & 0 \\ -\mathbf{p}_{11} & -\mathbf{p}_{12} & -\mathbf{p}_{13} & -\mathbf{p}_{21} & -\mathbf{p}_{22} & -\mathbf{p}_{23} & -\mathbf{p}_{31} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -(\mathbf{k}_{11}+\mathbf{k}_{12}+\mathbf{k}_{13})\cdot\mathbf{p}_{11} & -(\mathbf{k}_{11}+\mathbf{k}_{12}+\mathbf{k}_{13})\cdot\mathbf{p}_{11} & \dots & -\mathbf{k}_{13}\cdot\mathbf{p}_{31} \\ -(\mathbf{k}_{21}+\mathbf{k}_{22}+\mathbf{k}_{23})\cdot\mathbf{p}_{11} & -(\mathbf{k}_{11}+\mathbf{k}_{12}+\mathbf{k}_{13})\cdot\mathbf{p}_{11} & \dots & -\mathbf{k}_{13}\cdot\mathbf{p}_{31} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -(\mathbf{k}_{11}+\mathbf{k}_{12}+\mathbf{k}_{13})\cdot\mathbf{p}_{11} & -(\mathbf{k}_{11}+\mathbf{k}_{12}+\mathbf{k}_{13})\cdot\mathbf{p}_{11} & \dots & -\mathbf{k}_{13}\cdot\mathbf{p}_{31} \end{bmatrix}$$

$a_{11} = -(\mathbf{k}_{11}+\mathbf{k}_{12}+\mathbf{k}_{13})\cdot\mathbf{p}_{11}$ – число (результат скалярного произведения).
Размерность матрицы $\mathbf{A}$ – $N \times N$

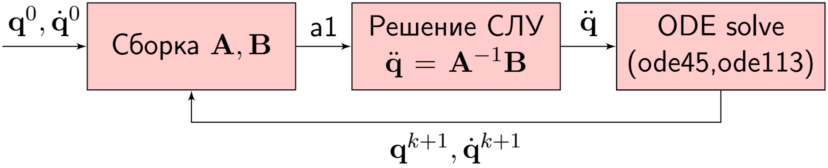
Формирование матрицы $\mathbf{B}$

Матрица $\mathbf{B}$ – столбец $N \times 1$, где N – число степеней свободы системы:

$$\mathbf{B} = -(\mathbf{pT})\left(\mathbf{K}(\mathbf{T}^T \boldsymbol{f} - \dot{\boldsymbol{\omega}}_0 \mathbf{1}_n) + \mathbf{M}' + \mathbf{M}\right) - \mathbf{pY}$$

При формировании матрицы $\mathbf{B}$ все составляющие матрицы должны быть записаны в одной системе координат, например в $Ox_0y_0z_0$.

Блок схема программы



- Файл-скрипт main.m
  Формирование начальных условий. Вызов функции-интегратора (ode45, ode113).
- Файл-функция правых частей
  Формирование матриц $\mathbf{A}, \mathbf{B}$. Решение системы линейных уравнений (определение $\ddot{\mathbf{q}}$).