Системы твердых тел

Матричные уравнения связей

Юдинцев В. В.

Кафедра теоретической механики

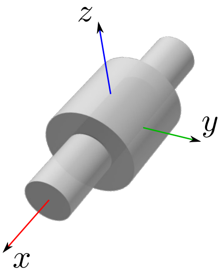
5 мая 2026 г.

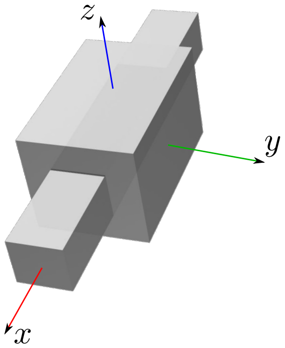
САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
SAMARA UNIVERSITY

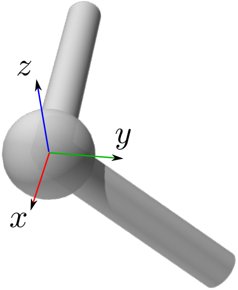
Содержание

Шарниры

Шарнир, соединяющий два смежных тела, может ограничивать их относительное поступательное и вращательное движение. В общем случае в шарнире возникают произвольно направленные векторы силы реакции и момента.

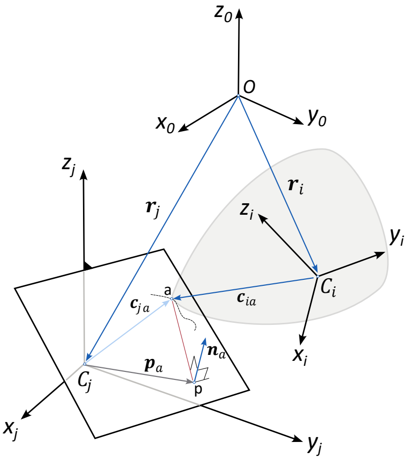






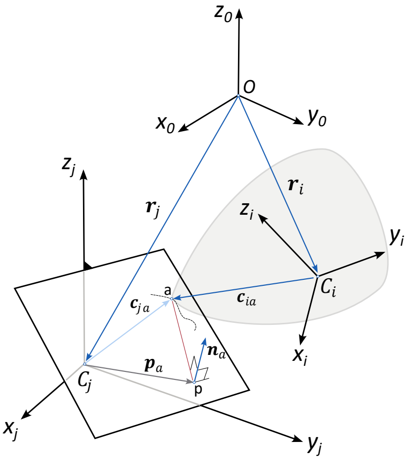
Связь ”Точка-плоскость”

Точка-плоскость



Определим уравнения элементарной связи «точка-плоскость», которая ограничивает относительное поступательное движение двух тел таким образом, что определенная точка одного тела (*i*) вынуждена находиться на плоскости, жестко связанной с другим телом (*j*).

Точка-плоскость



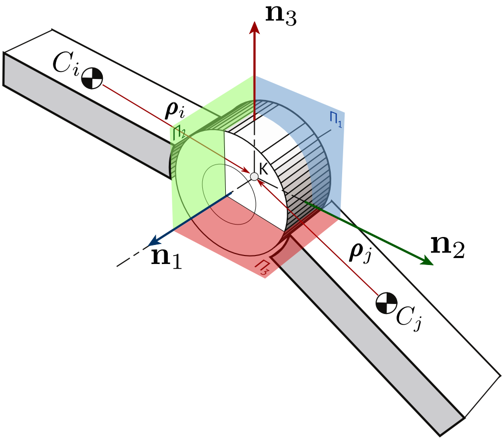
Кинематическая связь ”точка-плоскость”приводит к возникновению в точке контакта силы реакции, перпендикулярной плоскости, в которой разрешено движение заданной точки тела (i):

$$\mathbf{R}_a = \lambda \mathbf{n}_a$$

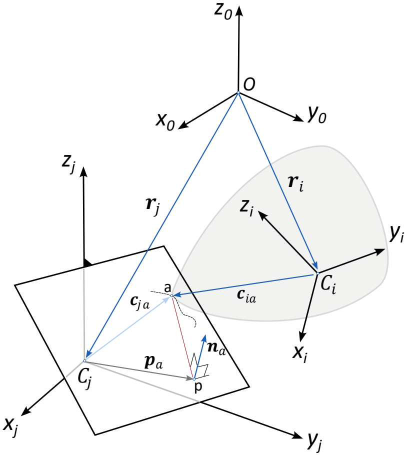
где λ – множитель Лагранжа, $\mathbf{n}_a$ – единичный вектор нормали плоскости.

Шарниры

Задав несколько связей «точка-плоскость», возможно определение связи «точка-прямая» (минус 2 степени свободы) и «точка-точка» (минус 3 степени свободы).

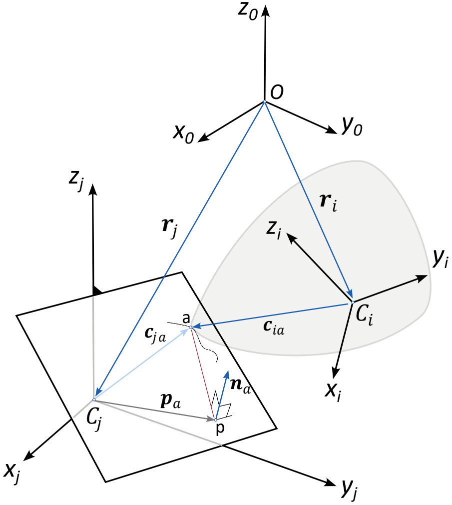


Точка-плоскость



- Точка «а», связанная с телом i, скользит по плоскости, связанной с телом j.
- Положение точки «а» относительно центра масс тела i определяется неизменным (в системе координат $C_i x_i y_i z_i$) шарнирным вектором $\mathbf{c}_{ia}$
- Плоскость, связанная с телом j определяется единичным вектором нормали $\mathbf{n}_a$ и положением некоторой точки плоскости $\mathbf{p}_a$.

Уравнение связи



Точка «а» принадлежит плоскости если выполняется условие:

$$(\mathbf{r}_i + \mathbf{c}_{ia} - \mathbf{r}_j - \mathbf{p}_a) \cdot \mathbf{n}_a = 0 \qquad (1)$$

Выражение в скобках – вектор $\overrightarrow{pa}$, лежащий в плоскости, связанной с телом *j*.

Уравнение связи

Векторная запись:

$$(\mathbf{r}_i + \mathbf{c}_{ia} - \mathbf{r}_j - \mathbf{p}_a) \cdot \mathbf{n}_a = 0 \tag{2}$$

Матричная координатная запись:

$$(\mathbf{r}_i^{(0)} + \mathbf{A}_i \mathbf{c}_{ia}^{(i)} - \mathbf{r}_j^{(0)} - \mathbf{A}_j \mathbf{p}_a^{(j)})^T \mathbf{A}_j^T \mathbf{n}_a^{(j)} = 0 \tag{3}$$

или

$$(\mathbf{A}_j \mathbf{n}_a^{(j)})^T (\mathbf{r}_i^{(0)} + \mathbf{A}_i \mathbf{c}_{ia}^{(i)} - \mathbf{r}_j^{(0)}) - (\mathbf{n}_a^{(j)})^T \mathbf{p}_a^{(j)} = 0 \tag{4}$$

Последнее слагаемое – это расстояние от начала системы координат C_j до плоскости, которое не изменяется.

Уравнение связи

Матричное уравнение связи (верхний индекс в скобках обозначает номер системы координат):

$$(\mathbf{A}_j \mathbf{n}_a^{(j)})^T (\mathbf{r}_i^{(0)} + \mathbf{A}_i \mathbf{c}_{ia}^{(i)} - \mathbf{r}_j^{(0)}) - (\mathbf{n}_a^{(j)})^T \mathbf{p}_a^{(j)} = 0 \qquad (5)$$

Производная уравнения связи:

$$(\mathbf{A}_j \tilde{\boldsymbol{\omega}}_j^{(j)} \mathbf{n}_a^{(j)})^T (\mathbf{r}_i^{(0)} + \mathbf{A}_i \mathbf{c}_{ia}^{(i)} - \mathbf{r}_j^{(0)}) + (\mathbf{A}_j \mathbf{n}_a^{(j)})^T (\mathbf{V}_i^{(0)} + \mathbf{A}_i \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i^{(i)} \mathbf{c}_{ia}^{(i)} - \mathbf{V}_j^{(0)}) \qquad (6)$$

Производные матриц поворота:

$$\dot{\mathbf{A}}_i = \mathbf{A}_i \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i, \quad \dot{\mathbf{A}}_j = \mathbf{A}_j \tilde{\boldsymbol{\omega}}_j, \quad \dot{\mathbf{A}}_j^T = -\tilde{\boldsymbol{\omega}}_j \mathbf{A}_j^T$$

Уравнение связи

Производная уравнения связи:

$$(\mathbf{A}_j \tilde{\omega}_j^{(j)} \mathbf{n}_a^{(j)})^T (\mathbf{r}_i^{(0)} + \mathbf{A}_i \mathbf{c}_{ia}^{(i)} - \mathbf{r}_j^{(0)}) + (\mathbf{A}_j \mathbf{n}_a^{(j)})^T (\mathbf{V}_i^{(0)} + \mathbf{A}_i \tilde{\omega}_i^{(i)} \mathbf{c}_{ia}^{(i)} - \mathbf{V}_j^{(0)}) \quad (7)$$

Координатный столбец радиус-вектора точки контакта относительно центра масс тела j в ”нулевой” системе координат:

$$\boldsymbol{c}_{ja}^{(0)} = \mathbf{r}_i^{(0)} + \mathbf{A}_i \mathbf{c}_{ia}^{(i)} - \mathbf{r}_j^{(0)} \quad (8)$$

Производная этого вектора:

$$\frac{d\boldsymbol{c}_{ja}^{(0)}}{dt} = \mathbf{V}_i^{(0)} + \mathbf{A}_i \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i^{(i)} \mathbf{c}_{ia}^{(i)} - \mathbf{V}_j^{(0)} \quad (9)$$

Уравнение связи для скоростей (после первого дифференцирования):

$$(\mathbf{A}_j \tilde{\boldsymbol{\omega}}_j^{(j)} \mathbf{n}_a^{(j)})^T \boldsymbol{c}_{ja}^{(0)} + (\mathbf{A}_j \mathbf{n}_a^{(j)})^T \frac{d\boldsymbol{c}_{ja}^{(0)}}{dt} = 0 \quad (10)$$

Уравнение связи

$$(\mathbf{A}_j \tilde{\omega}_j^{(j)} \mathbf{n}_a^{(j)})^T \boldsymbol{c}_{ja}^{(0)} + (\mathbf{A}_j \mathbf{n}_a^{(j)})^T \frac{d\boldsymbol{c}_{ja}^{(0)}}{dt} = 0 \qquad (11)$$

Вторая производная:

$$2(\mathbf{A}_j \tilde{\boldsymbol{\omega}}_j^{(j)} \mathbf{n}_a^{(j)})^T \frac{d\boldsymbol{c}_{ja}^{(0)}}{dt} + (\mathbf{A}_j \tilde{\boldsymbol{\omega}}_j^{(j)} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_j^{(j)} \mathbf{n}_a^{(j)} + \mathbf{A}_j \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_j^{(j)} \mathbf{n}_a^{(j)})^T \boldsymbol{c}_{ja}^{(0)} +$$

$$+ (\mathbf{A}_j \mathbf{n}_a^{(j)})^T (\mathbf{a}_i^{(0)} + \mathbf{A}_i \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i^{(i)} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i^{(i)} \mathbf{c}_{ia}^{(i)} + \mathbf{A}_i \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_i^{(i)} \mathbf{c}_{ia}^{(i)} - \mathbf{a}_j^{(0)}) = 0 \qquad (12)$$

Блочная матричная запись:

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{n}_a^{(0)}]^T & -[\mathbf{n}_a^{(0)}]^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_i^{(0)} \\ \mathbf{a}_j^{(0)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} [\mathbf{n}_a^{(0)}]^T \mathbf{A}_i \tilde{\mathbf{c}}_{ia}^{(i)} & [\boldsymbol{c}_{ja}^{(0)}]^T \mathbf{A}_j \tilde{\mathbf{n}}_a^{(j)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\epsilon}_i^{(i)} \\ \boldsymbol{\epsilon}_j^{(j)} \end{bmatrix} =$$

$$= -2(\mathbf{A}_j \tilde{\boldsymbol{\omega}}_j^{(j)} \mathbf{n}_a^{(j)})^T \frac{d\boldsymbol{c}_{ja}^{(0)}}{dt} - [\boldsymbol{c}_{ja}^{(0)}]^T \mathbf{A}_j \tilde{\boldsymbol{\omega}}_j^{(j)} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_j^{(j)} \mathbf{n}_a^{(j)} - [\mathbf{n}_a^{(0)}]^T \mathbf{A}_i \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i^{(i)} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i^{(i)} \mathbf{c}_{ia}^{(i)} \qquad (13)$$

Уравнение связи

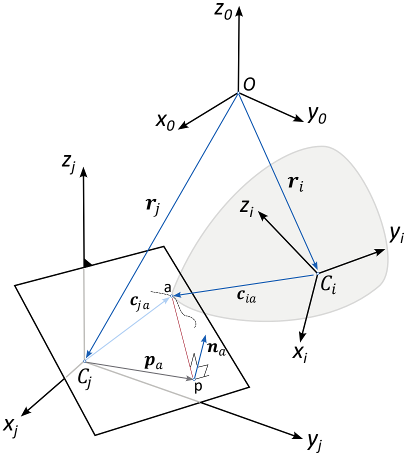
$$\begin{bmatrix}[\mathbf{n}_a^{(0)}]^T & -[\mathbf{n}_a^{(0)}]^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{a}_i^{(0)} \\ \mathbf{a}_j^{(0)}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}[\mathbf{n}_a^{(0)}]^T\mathbf{A}_i\tilde{\mathbf{c}}_{ia}^{(i)} & [\boldsymbol{c}_{ja}^{(0)}]^T\mathbf{A}_j\tilde{\mathbf{n}}_a^{(j)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\epsilon}_i^{(i)} \\ \boldsymbol{\epsilon}_j^{(j)}\end{bmatrix} =$$

$$= -2(\mathbf{A}_j\tilde{\omega}_j^{(j)}\mathbf{n}_a^{(j)})^T\frac{d\boldsymbol{c}_{ja}^{(0)}}{dt} - [\boldsymbol{c}_{ja}^{(0)}]^T\mathbf{A}_j\tilde{\omega}_j^{(j)}\tilde{\omega}_j^{(j)}\mathbf{n}_a^{(j)} - [\mathbf{n}_a^{(0)}]^T\mathbf{A}_i\tilde{\omega}_i^{(i)}\tilde{\omega}_i^{(i)}\mathbf{c}_{ia}^{(i)}$$

$$\begin{bmatrix}[\mathbf{n}_a^{(0)}]^T & -[\mathbf{n}_a^{(0)}]^T\mathbf{A}_i\tilde{\mathbf{c}}_{ia}^{(i)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{a}_i^{(0)} \\ \boldsymbol{\epsilon}_i^{(i)}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-[\mathbf{n}_a^{(0)}]^T & -[\boldsymbol{c}_{ja}^{(0)}]^T\mathbf{A}_j\tilde{\mathbf{n}}_a^{(j)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{a}_j^{(0)} \\ \boldsymbol{\epsilon}_j^{(j)}\end{bmatrix} = \boldsymbol{b}_{ij}^{(0)}$$

$$\mathbf{Q}_i\ddot{\mathbf{X}}_i + \mathbf{Q}_j\ddot{\mathbf{X}}_j = \boldsymbol{b}_{ij}^{(0)}$$

Сила и момент реакции



Сила реакции:

$$\mathbf{R}_i^{(0)} = \mathbf{n}_a^{(0)}\lambda = -\mathbf{R}_j^{(0)}$$

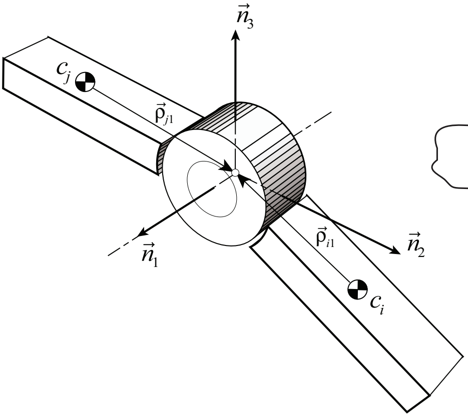
Момент от силы реакции:

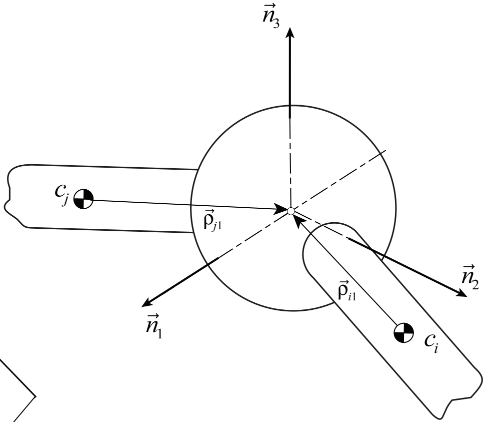
$$\mathbf{M}_i^{(i)}(\mathbf{R}_i) = \tilde{\mathbf{c}}_{ia}^{(i)}\mathbf{A}_i^T\mathbf{n}_a^{(0)}\lambda$$

$$\mathbf{M}_j^{(j)}(\mathbf{R}_i) = \tilde{\mathbf{c}}_{ja}^{(j)}\mathbf{n}_a^{(j)}\lambda$$

Связь, ограничивающая относительное вращение

Ограничение относительного вращения





Ограничение относительного вращения

Угловое ускорение тела *j* относительно тела *i* в проекции на направление $\vec{n}_{ij}$ должно быть равно нулю:

$$\left(\mathbf{n}_{ij}^{(i)}\right)^T \varepsilon_{ji}^{(i)} = 0.$$

Относительная угловая скорость:

$$\boldsymbol{\omega}_{ji}^{(i)} = \mathbf{A}_i^T \mathbf{A}_j \boldsymbol{\omega}_j^{(j)} - \boldsymbol{\omega}_i^{(i)}.$$

Относительное угловое ускорение:

$$\varepsilon_{ji}^{(i)} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ji}^{(i)} = -\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i^{(i)} \mathbf{A}_i^T \mathbf{A}_j \boldsymbol{\omega}_j^{(j)} + \mathbf{A}_i^T \mathbf{A}_j \tilde{\boldsymbol{\omega}}_j^{(j)} \omega_j^{(j)} + \mathbf{A}_i^T \mathbf{A}_j \varepsilon_j^{(j)} - \varepsilon_i^{(i)}.$$

Второе слагаемое в правой части будет равно нулю, поскольку

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_j^{(j)} \boldsymbol{\omega}_j^{(j)} = 0$$

Ограничение относительного вращения

Относительное угловое ускорение:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ji}^{(i)} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ji}^{(i)} = -\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i^{(i)} \mathbf{A}_i^T \mathbf{A}_j \boldsymbol{\omega}_j^{(j)} + \mathbf{A}_i^T \mathbf{A}_j \boldsymbol{\varepsilon}_j^{(j)} - \boldsymbol{\varepsilon}_i^{(i)}.$$

Подставив последнее выражение в уравнение связи, получим

$$\left(\mathbf{n}_{ij}^{(i)}\right)^T \mathbf{A}_i^T \mathbf{A}_j \boldsymbol{\varepsilon}_j^{(j)} - \left(\mathbf{n}_{ij}^{(i)}\right)^T \boldsymbol{\varepsilon}_i^{(i)} = \left(\mathbf{n}_{ij}^{(i)}\right)^T \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i^{(i)} \mathbf{A}_i^T \mathbf{A}_j \boldsymbol{\omega}_j^{(j)} \tag{14}$$

Ограничение относительного вращения

$$\left(\mathbf{n}_{ij}^{(i)}\right)^T \mathbf{A}_i^T \mathbf{A}_j \varepsilon_j^{(j)} - \left(\mathbf{n}_{ij}^{(i)}\right)^T \varepsilon_i^{(i)} = \left(\mathbf{n}_{ij}^{(i)}\right)^T \tilde{\omega}_i^{(i)} \mathbf{A}_i^T \mathbf{A}_j \omega_j^{(j)} \tag{15}$$

Уравнение (15) можно привести к виду

$$\mathbf{Q}_i \ddot{\mathbf{X}}_i + \mathbf{Q}_j \ddot{\mathbf{X}}_j = b_{ij}, \tag{16}$$

где матрицы коэффициентов при ускорениях определяются следующим образом:

$$\mathbf{Q}_j = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\left(\mathbf{n}_{ij}^{(i)}\right)^T \mathbf{A}_i^T \mathbf{A}_j \end{pmatrix}, \; \mathbf{Q}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \left(\mathbf{n}_{ij}^{(i)}\right)^T \end{pmatrix}, \tag{17}$$

скалярный член b_{ij} определяется так:

$$b_{ij} = -\left(\mathbf{n}_{ij}^{(i)}\right)^T \tilde{\omega}_i^{(i)} \mathbf{A}_i^T \mathbf{A}_j \omega_j^{(j)}.$$

Момент реакции

При существовании связи, ограничивающей относительное вращение двух тел, на тела действует реактивный момент. На тело i действует момент

$$\mathbf{L}_i = -\mathbf{n}_{ij}^{(i)}\lambda, \tag{18}$$

на тело j

$$\mathbf{L}_j = \mathbf{A}_j^T \mathbf{A}_i \mathbf{n}_{ij}^{(i)}\lambda. \tag{19}$$